

基于代数消元的一般 6R 机械手逆运动学实时算法

苏海军¹ 廖启征¹ 梁崇高¹ 吴桐²

(1. 北京邮电大学机电工程系 北京 100876; 2. 机械工业部北京自动化所 北京 100011)

摘 要: 针对一类位置和姿态具有强耦合的复杂 6R 机械手, 本文提出一种基于代数消元的运动学逆解算法. 该算法不仅能求得全部位置逆解, 满足实时要求, 而且具有无需初值、通用性好等优点. 此外本文还提出一种求解第二、三个关节角度的新算法, 从而解决了当关节一接近重根时出现病态的问题. 最后, 给出一个喷漆机械手实例. 在图形工作站对机械手作了图形仿真, 验证了逆解. 此算法已编写成 C++ 程序, 成功地用于该机械手. 测试表明程序在一般情况下能在 10ms 内求得单解, 20ms 内求得全部 16 组解. 该程序也可能为机器人仿真系统提供一个较通用的算法.

关键词: 复杂机械手; 运动学逆解; 代数消元; 实时算法; 图形仿真

中图分类号: TP24

文献标识码: B

1 引言

传统机械手(如 PUMA560)的结构一般比较特殊, 如轴线相交或平行, 轴线长度为零等等. 这样它的姿态和位置之间就没有耦合, 其逆解很容易用分离变量的办法来实现. 在这方面有许多中外学者都做了巨大的努力, 也有很多成功的方法^[1-3]. 然而对于一类结构尺寸比较一般的复杂机械手^[4-7], 由于姿态和位置高度耦合, 一般无法进行变量分离, 这时必须借助于数值算法. 这些算法可分为 3 类: a) 数值-解析解法^[7], 牛顿-拉弗森法^[8]等. 这些算法可满足实时性要求, 但较难得到全部逆解, 且必须给出适当的初值. b) 优化算法^[9], 区间迭代法^[10], 遗传算法^[11]等. 这类算法收敛范围大, 可求得全部逆解, 但一般实时性差. c) 位置和姿态分别迭代法^[12]. 这种算法能较迅速地求得全部解, 但当机械手位置和姿态高度耦合时, 迭代过程会发散.

针对上述算法的缺点, 本文应用空间一般 7R 机构位移分析(该问题与一般 6R 机械手的逆解问题等价, 曾被喻为是空间机构运动分析中的珠穆朗玛峰, 它于 1986 年为我国机构学者廖启征, 李宏友, 梁崇高解决^[13-14])的成果, 得到一种基于代数消元的独特实用算法. 这种算法无需初值就可实时地得到全部解, 而且可以适用于各种一般 6R 机械手. 其基本思路是:

①将多项式方程组通过适当的代数消元, 得到只含一个关节变量的结式. 这一步通常用计算机代数系统实现.

②将机械手末端的位姿参数代入结式, 并展开结式可得一个关于某个关节变量的一元高

次多项式方程.

③运用数值算法求解该一元方程, 从而得到其中一个关节变量.

④将③解出的关节变量回代, 可将其他关节变量依次较容易地解出来.

此外本文还改进了文[15]中求解第二, 三关节变量的算法, 从而克服了该方法在第一关节出现重根时出现病态的缺点. 最后给出一个喷漆机械手的应用实例, 并在 SGI 图形工作站上进行图形仿真, 验证了逆解程序的正确性.

2 建立数学模型

我们知道对一般 6R 机械手的正运动学可用 D-H 矩阵表示如下

$$[\theta_1][M_1][\theta_2][M_2][\theta_3][M_3][\theta_4][M_4][\theta_5][M_5][\theta_6][M_6] = [N] \quad (1)$$

其中: $[N]$ 是描述机械手末端位姿的矩阵, $[\theta_i]$ 是绕坐标系 $i-1$ 的 Z 轴旋转的变换矩阵,

$[M_i]$ 是只与结构参数有关的矩阵.

$$[\theta_i] = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (i=1, \dots, 6) \quad (2)$$

机械手运动学逆解就是已知(1)式的机械手位姿参数 $[N]$ 和结构参数 $[M_i]$, 求解右边 6 个角位移量 θ_i .

3 代数消元

①方程变形. 在进行位置逆解时, 可先把(1)式进行移项并将 $[\theta_i]$ 进行对角化得

$$(M_3)(\theta_4)(M_4)(\theta_5)(M_5)(\theta_6) = (\theta_3)^{-1}(M_2)^{-1}(\theta_2)^{-1}(M_1)^{-1}(\theta_1)^{-1}(N)(M_6)^{-1} \quad (3)$$

$$\text{式中: } (\theta_i) = \begin{bmatrix} e^{j\theta_i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{j\theta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_i^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x_i = e^{j\theta_i} = \cos(\theta_i) + j * \sin(\theta_i) \\ j = \sqrt{-1},$$

(M_i) 仍是只与结构参数有关的常量矩阵.

把(3)式左边记为 $[U]$, 右边记为 $[V]$. (3)式可写为:

$$[U] = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & U_{24} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & U_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} & V_{14} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} & V_{24} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} & V_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [V] \quad (4)$$

②消 x_6 . 为了进行消元, 需要最大限度地找出类似(4)式形式的关系式. 这可借助于计算机来完成^[4,16-18]. 最后可推导出 34 个方程. 从这 34 方程中选出左边不含 x_6 及 x_6^{-1} , 而右边

不含 x_3^{-1} 的方程, 共有 10 个. 它们可以写成如下形式:

$$\sum_{m=0}^2 \sum_{n=0}^2 C_{imn} x_4^{m-1} x_5^{n-1} = \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^1 A_{ipq} x_2^{p-1} x_3^q \quad (i=1,2,\dots,10) \quad (5)$$

式中: $A_{ipq} = \sum_{r=0}^2 a_{ipqr} x_1^{r-1}$, C_{imn} 及 a_{ipqr} 都是关于结构参数及末端位姿参数的常量.

③消去 x_4 , x_5 . 从式(5)中取 8 个方程, 把 $\{x_4 x_5, x_4 x_5^{-1}, x_4^{-1} x_5, x_4^{-1} x_5^{-1}, x_4^{-1}, x_5, x_5^{-1}\}$ 8 个量当作线性方程组的 8 个未知量进行求解, 并将求解结果代入剩下的 2 个方程, 得到

$$\sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^1 D_{kpq} x_2^{p-1} x_3^q = 0 \quad (k=1,2) \quad (6)$$

式中 $D_{kpq} = \sum_{r=0}^2 d_{kpqr} x_1^{r-1}$, d_{kpqr} 由结构参数及机械手末端位姿参数决定.

④构造结式. 为方便用高级语言编制程序, 将式(6)中的 x_i 替换为 $(1+j*t_i)/(1-j*t_i)$, 其中 $t_i = \tan(\theta_i/2)$, $i=1,\dots,6$. 去分母后, 式(6)关于 t_1, t_2, t_3 的最高次项为 $t_1^2 t_2^2 t_3^1$. 将式(6)的实部和虚部分别提取出来, 可得四个方程:

$$\sum_{m=0}^2 \sum_{n=0}^1 B_{mn} t_2^m t_3^n = 0 \quad (7)$$

式中: $\mathbf{0} = (0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$, $\mathbf{B}_{mn} = (B_{1mn} \ B_{2mn} \ B_{3mn} \ B_{4mn})^T$, $B_{imn} = \sum_{k=0}^2 b_{ikmn} t_1^k$ 是关于 t_1 的二次三项式, b_{ikmn} 只与结构参数及位姿参数有关, $i=1,\dots,4$.

将式(7)乘以 t_2 可得

$$\sum_{m=0}^2 \sum_{n=0}^1 B_{mn} t_2^{m+1} t_3^n = 0 \quad (8)$$

式(7)及式(8)可写成分块矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{01} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{20} & \mathbf{B}_{10} & \mathbf{B}_{00} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{01} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{20} & \mathbf{B}_{10} & \mathbf{B}_{00} & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{8 \times 8} * \mathbf{D} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

其中: $\mathbf{D} = (t_2^3 * t_3 \ t_2^2 * t_3 \ t_2 * t_3 \ t_3 \ t_2^3 \ t_2^2 \ t_2 \ 1)^T$

式(9)的 8×8 系数矩阵的行列式就是所要求的结式. 以上过程利用代数系统 Mathematica 进行符号推演来完成. 然后将结式中的 B_{ikmn} 共 24 个元素用公式的形式保存下来, 为减少计算量, 其中的结构参数用数值代入, 而位姿参数则以符号形式保留下来, 在逆解的迭代过程中再代入具体数值.

4 算法流程

将前面推导出来的公式嵌入机械手的逆运动学控制程序. 整个逆解程序步骤如下, 流程图如图 1 所示.

①获得一元方程. 将待求的机械手的位姿参数 $[N]$ 代入, 求得式(9) 8×8 系数矩阵的行列式各个元素, 然后应用拉普拉斯原理将该行列式展开, 求得如下关于 t_1 的一元 16 次方程中

的各个系数 c_k :

$$\sum_{k=0}^{16} c_k t_1^k = 0 \quad (10)$$

②求解一元多项式方程. 求解一元多项式方程的实用算法有许多, 且比较成熟. 实际程序中, 可将牛顿法、黄金分割法、牛顿下山或劈因子法等数值算法相结合, 求解多项式方程(10)可得 t_1 .

③求 t_2, t_3 . 将求得的 t_1 回代求 t_2, t_3 的方法有多种. 一种方法是从方程组(9)选出 7 个方程, 将 $\{t_2^3 t_3, t_2^2 t_3, t_2 t_3, t_3, t_2^3, t_2^2, t_2\}$ 当作假想变量解该线性方程组, 可得 t_3 和 t_2 . 这种方法的优点是编程方便, 一次能同时求得 t_3 和 t_2 . 其缺点是速度慢, 而且可能出现奇异. 文[15]提出一个求解形如式(9)的方程组的快速算法. 但它缺点是当 t_1 出现重根时将出现病态. 为了避免以上两种方法的缺点, 作者提出以下算法:

将式(7)重新整理为:

$$\mathbf{B}_{21} t_2^2 t_3 + \mathbf{B}_{11} t_2 t_3 + \mathbf{B}_{01} t_3 + (\mathbf{B}_{20} t_2^2 + \mathbf{B}_{10} t_2 + \mathbf{B}_{00}) = 0 \quad (11)$$

由方程组(11), 可线性地消去 $\{t_2^2 t_3, t_2 t_3, t_3\}$ 相应地得到下列方程:

$$A_2 * t_2^2 + A_1 * t_2 + A_0 = 0 \quad (12)$$

式中: A_0, A_1, A_2 是由 B_{kmn} 计算出来的数.

解方程(12)可得两个 t_2 , 一般情况下其中有一个是增根, 一个是正确根. 将 t_2 代入式(11)可求得四个 t_3 . 当 t_2 取的是增根时, 求得的 4 个 t_3 将不一致, 反之若 t_2 取的是正确根时, 求得的 4 个 t_3 将是一致, 由此可判断哪个 t_2 为增根. 当通过解方程(10)求 t_1 出现重根时, 由方程(12)求得的两组 t_2 都不是增根, 因而对应可求得两组 t_2 和 t_3 , 分别对应 t_1 的两个重根. 这样就解决了重根的问题.

本算法既继承了文[15]方法的优点, 同时又克服了它的缺点. 更重要的是, 当 t_1 出现重根或接近重根时也能顺利地求得 t_2, t_3 , 且计算量仅为其一半.

④将 t_1, t_2, t_3 代入式(1), 可求得 t_5, t_5, t_6 .

5 应用实例

图 2 是一种工业用的 6R 喷漆机械手 (此时机械手各关节角度为 0). 坐标系 0 是参考系, 坐标系 6 建立在机械手末端执行器上. 其结构参数为: $d_1=842, d_4=774, d_5=98, d_6=63, a_1=400, a_2=800, a_3=130, \alpha_5=50^\circ$. 关节角度范围是: $\theta_1 \in [-90^\circ, 90^\circ], \theta_2 \in [-30^\circ, 90^\circ], \theta_3 \in [-70^\circ, 70^\circ], \theta_4 \in [-300^\circ, 300^\circ], \theta_5 \in [-180^\circ, 180^\circ], \theta_6 \in [-460^\circ, 460^\circ]$. 这种机械手由于位置和姿态高度耦合,

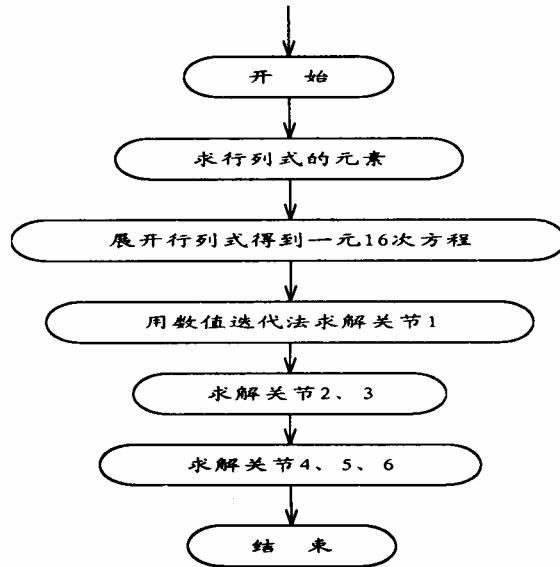


图 1 逆解程序流程图

因而没有封闭解.

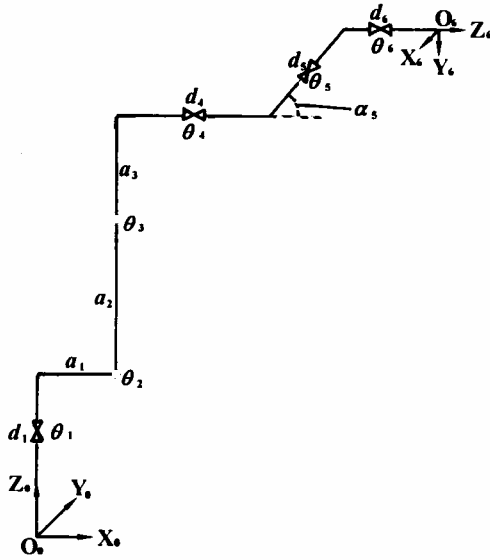


图2 喷漆机器人的结构简图

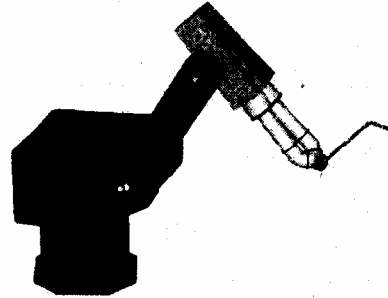


图3 第2,4组解仿真结果

逆解数例: 为验证程序的正确性, 首先给定一组关节角度 $\theta_1=20^\circ, \theta_2=30^\circ, \theta_3=20^\circ, \theta_4=25^\circ, \theta_5=80^\circ, \theta_6=0^\circ$, 代入式(1)经正解得到机械手末端位姿参数:

$$[N] = \begin{bmatrix} -0.0478066 & -0.774265 & 0.631053 & 1450.49 \\ 0.0998169 & 0.62491 & 0.77429 & 528.48 \\ -0.993857 & 0.100006 & 0.04741 & 1023.93 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

然后将 $[N]$ 输入逆解程序(不给初值), 用时15ms (Pentium75) 得到其全部16组解, 表1只列出实数解, 全部解可参考文献[4]. 其中第2、4组解在角度限制范围内为可行解, 第2组正是给定的那组关节角. 它们的仿真结果(如图3). 图3 第2、4组解仿真结果

表1 6个关节角的的实数解

组	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6
1	20.0212	129.852	-181.088	154.534	-74.0757	8.56948
2	20.	30.	20.	25.	80.	0.
3	16.1045	130.806	-175.564	-67.8718	69.7369	130.717
4	16.0113	31.0786	13.1693	-106.549	-76.0736	-118.13

6 结论

本文提出了一种基于代数消元的求机器人运动学逆解的实时算法, 该方法首先通过代数消元得一个关于某个关节变量的一元方程, 这样就大大减少了实时迭代时的运算量, 从而满足机器人实时控制的要求. 该算法已形成实用程序, 并已成功应用于一种喷漆机械手. 测试

表明该算法能在 20ms 内求得全部逆解, 10ms 内求得单解. 最后给出一个数例, 并对该机械手的三维图形仿真进一步验证了逆解程序.

参 考 文 献

- 1 Paul R P, Shimano B E, Mayer G. Kinematic Control Equation for Simple Manipulators. IEEE Trans SMC, 1981, 11(6): 449-455
- 2 Lee C S G, Ziegler M. A Geometric Approach in Solving the Inverse Kinematics of PUMA Robots. Proc of the 13th SIR, 1983
- 3 贺显曜. 机器人 PUMA560 逆运动方程的新解法. 机器人, 1989, 11(3): 19-26
- 4 苏海军. 空间机构运动学位移分析. 北京邮电大学硕士学位论文, 1998
- 5 Lee H Y, Woernle C, Hiller M. A Complete Solution for the Inverse Kinematic Problem of the General 6R Robot Manipulator. 1991, 113: 481-486
- 6 李巧敏. EMMA 的运动逆解. 机器人, 1991, 13(4): 31-34
- 7 易科. 一种无解析解的运动学问题的数值—解析解法. 中科院沈阳自动化所研究报告
- 8 Angeles J. On the Numerical Solution for the Inverse Kinematics Problem. Int J. Robotics Research, 1985, 4(2): 21-37
- 9 Goldenberg A A, Apkarian J A, Simith H W. A New Approach to kinematic control of Robot manipulators. ASME J. Dynamic System Measure Control, 1987, 109: 97-103
- 10 Rao R S, Asaithambi A, Agrawal S K. Inverse Kinematic Solution of Robot Manipulators Using Interval Analysis. ASME J. of Mechanical Design, 1998, 120: 147-150
- 11 刘永超等. 基于遗传算法的机器人运动学逆解. 机器人, 1998, 20(6): 421-426
- 12 毕清明, 蔡鹤皋. 六自由度操作手的逆运动学问题. 机器人, 1994, 16(2): 92-97
- 13 廖启征, 梁崇高, 张启先. 空间 7R 机构位移分析的新研究. 机械工程学报, 1986, 22(3): 1-9
- 14 Lee H Y, Liang C G. Displacement Analysis of the General Spatial 7-Link 7-R Mechanism. Mechanisms and Machine Theory, 1988, 23(3): 219-226
- 15 廖启征, 刘新升, 梁崇高译, J. 达菲著. 机构和机械手分析. 北京, 北京邮电大学出版社, 1989.
- 16 廖启征. 空间机构(无球面副)位移分析的酉交矩阵法. 北京, 北京航空航天大学研究生院工学博士学位论文, 1987
- 17 梁崇高, 李宏友, 廖启征. Analysis of Linkages and Robot Mechanisms. 北京, 北京邮电大学出版社, 1988
- 18 廖启征. 空间一般 6R 机械手的位置反解, 中国科学技术文库, TP0093, 科学技术文献出版社, 1997

ALGEBRAIC ELIMINATION ALGORITHM FOR SOLVING THE INVERSE KINEMATICS OF GENERAL 6R MANIPULATORS

SU Hai-jun LIAO Qi-zheng LIANG Chong-gao

(Department of Mechanical Engineering of Beijing University of Posts & Telecommunications, Beijing 100876)

Abstract: An algebraic elimination algorithm for the inverse kinematics of the complex 6R manipulators with high coupling is developed in this paper. The algorithm can compute all the inverse kinematic solutions in real-time. It doesn't need inputting the initial point. Furthermore, a new method for computing the 2nd, 3rd joints is proposed. It solved the ill-conditioning problem when the 1st joint has multiple roots. Finally, an example of a painting robot is given. The simulation of the robot on the graphical workstation verified the algorithm. The C++ program of the algorithm has been successfully applied in the painting robot. The test results indicate that the program can obtain single solution in 10ms and all the 16 solutions in 20ms. It may also serve as a general kinematical program for the robot simulation system.

Keywords: Complex manipulators; inverse kinematics; algebraic elimination; real-time algorithm; graphical simulation

作者简介:

苏海军 (1974-), 男, 博士生, 研究领域: 机器人运动学及动力学、空间机构学